

Ćwiczenia pierwsze

1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x}; \quad (b) \int_4^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}; \quad (c) \int_{2\pi}^{\infty} x \cos x dx; \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-x} + 1}}; \quad (e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}; \quad (f) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{2x} dx.$$

2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\sqrt{x}+1)}; \quad (b) \int_4^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x}+3)^2}; \quad (c) \int_1^{\infty} \frac{x(x+1) dx}{x^4 + x + 1}; \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{(2^x + 1) dx}{3^x + 1}; \quad (e) \int_{\pi}^{\infty} \frac{(x + \sin x) dx}{x^3}; \quad (f) \int_4^{\infty} \frac{(3 + \cos x) dx}{\sqrt{x+2}}.$$

3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{(\sqrt{x}+1) dx}{x(x+1)}; \quad (b) \int_5^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^5-3}}; \quad (c) \int_2^{\infty} (e^{1/x} - 1) dx; \quad (d) \int_1^{\infty} \sin^2 \frac{1}{x} dx; \quad (e) \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^3 - \sin x}.$$

4. (a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \frac{1}{x^2 + 9}$ oraz osią Ox .

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq e^{-x}\}$.

(c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ($x \geq 1$) wokół osi Ox ma skończoną wartość.

5. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}; \quad (b) \int_0^e \frac{\ln x dx}{x}; \quad (c) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin x}; \quad (d) \int_3^5 \frac{2^x dx}{\sqrt{2^x - 8}}; \quad (e) \int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x+1)}.$$

6. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$(a) \int_0^4 \frac{\arctg x dx}{x\sqrt{x}}; \quad (b) \int_0^2 \frac{e^x dx}{x^3}; \quad (c) \int_0^4 \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}; \quad (d^*) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16 - x^4}}.$$

7. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych drugiego rodzaju:

$$(a) \int_0^1 \frac{(x^3 + 1) dx}{\sqrt{x}(x^2 + 1)}; \quad (b) \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x dx}{x^4}; \quad (c) \int_0^1 \frac{(e^x - 1) dx}{\sqrt{x^3}}; \quad (d^*) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}; \quad (e^*) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - \sqrt{x}}.$$

Analiza Matematyczna 2.1 (MAT1421) dla W2

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 15 jednostek – ćwiczeń o numerach od 1 do 15. Na zajęciach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Pozostałe podpunkty przeznaczone są do samodzielnej pracy studentów. Trudniejsze zadania oznaczone są gwiazdką.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminie na ocenę celującą z analizy matematycznej 2. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej <http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczeniiane/egzaminy-na-ocene-celujaca> oraz w książce [5].

Ćwiczenia 1

1. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$; (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

2. Korzystając z kryterium całkowitego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2 + n}$; (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n}{e^{2n} + 1}$.

3. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+2}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + e^n}{e^n + 4^n}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n3^n + 2^n}$.

4. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n-1}{3^n-1}$;
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \ln(1+3^{-n})$; (e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(\pi/n^2)}{\sin(\pi/n)}$; (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!}$.

5. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2016^n}{(2n)!}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+1}{n^4+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$; (e*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

6. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{n}{n+1}\right)^n$.

7. Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2016}}{3^n} = 0$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$; (d*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!(4n)!}{(5n)!(2n)!} = 0$.

8. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+1} - n)$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n+4^n}$; (c) $\sum_{n=4}^{\infty} \sin \frac{(-1)^n}{n}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n!}$.

9. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n+1}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (d) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{e}-1)$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$.

Ćwiczenia 2

10. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (4x-12)^n$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+6)^n}{3^n - 2^n}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^{2n}}{2^n + 3}$.

11. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\frac{5}{1-2x}$; (b) $\sin \frac{x}{2}$; (c) $x^2 e^{-x}$; (d) $\frac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

12. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć:

(a) $f^{(50)}(0)$, $f(x) = x^2 \cos x$; (b) $f^{(20)}(0)$, $f(x) = x e^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0)$, $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0)$, $f(x) = x \sin^2 \frac{x}{2}$.

13. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć szeregi Maclaurina funkcji:

(a) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$; (b) $f(x) = x e^{-x^2}$; (c) $f(x) = \ln(1+x^2)$; (d) $f(x) = \arctg x$.

14. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego $x \in (-1, 1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

15. Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{5^n}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)4^n}$.

Wskazówka. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

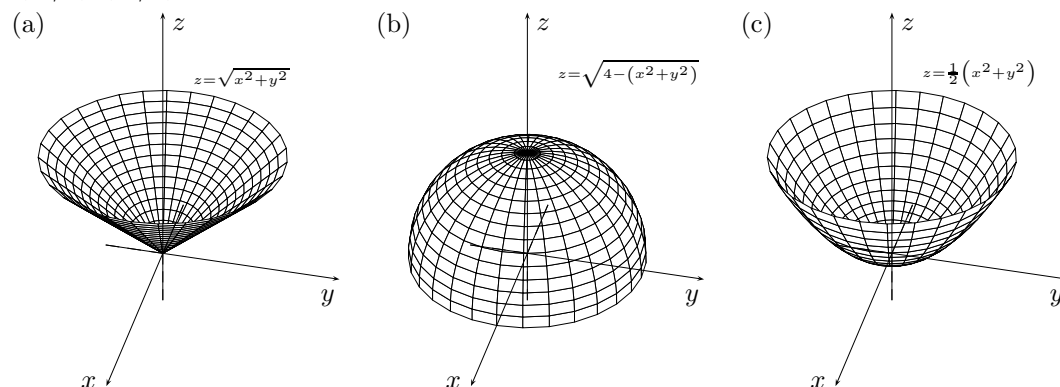
Ćwiczenia 3

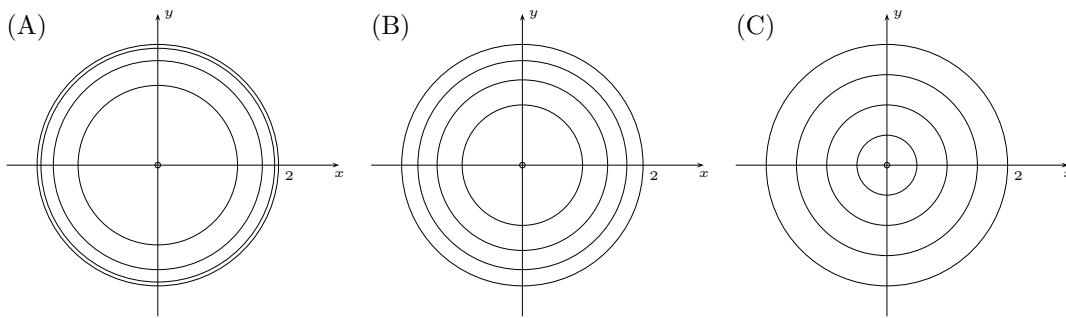
16. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x, y) = \ln(y - \sin x)$; (b) $f(x, y) = \sqrt{\frac{y-2}{x+1}}$; (c) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 - y}}$; (d) $f(x, y) = \ln \frac{x^2 + y^2 - 9}{16 - x^2 - y^2}$;

(e) $g(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{2-z}$; (f) $g(x, y, z) = \arccos(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$.

17. Wykresy (rys. (a)–(c)) połączyć z odpowiadającymi im poziomiami (rys. (A)–(C)) wykonanymi dla $h = 2, 3/2, 1, 1/2, 0$:





18. Naskicować wykresy funkcji:

- (a) $f(x, y) = 1 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$; (b) $f(x, y) = \sqrt{3 + 2x - x^2 - y^2}$; (c) $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 6y + 3$;
 (d) $f(x, y) = \cos x$; (e) $f(x, y) = 1 - y^2$; (f*) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$.

19. Obliczyć granice:

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4 - y^4)}{x^2 + y^2}$; (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$; (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$; (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \cos \frac{1}{x^4 + y^4}$.

20. Dobrać parametr $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcje były ciągłe w punkcie $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

- (a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{y} & \text{dla } x \in \mathbb{R}, y \neq 0, \\ a & \text{dla } x \in \mathbb{R}, y = 0; \end{cases}$ (b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ a & \text{dla } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
 (c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ a & \text{dla } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$ (d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + ay^2)}{x^2 + 2y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Ćwiczenia 4

21. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu f_x, f_y funkcji f we wskazanych punktach:

- (a) $f(x, y) = \frac{x^2}{y}, (0, 1)$; (b) $f(x, y) = \sqrt{x^6 + y^4}, (0, 0)$.

22. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f i g :

- (a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^3}{xy^2}$; (b) $f(x, y) = \arctg \frac{1 - xy}{x + y}$; (c) $f(x, y) = e^{\cos \frac{x}{y}}$;
 (d) $f(x, y) = y\sqrt{x^2 + y^2}$; (e) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$; (f) $g(x, y, z) = x^2 + \frac{xz}{y} + yz^3$;
 (g) $g(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$; (h) $g(x, y, z) = \cos(x \sin(y \cos z))$; (i) $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + \sqrt{y^2 + \sqrt{z^2 + 1}}}$.

* 23. Sprawdzić, że funkcja f spełnia równania:

- (a) $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2), \quad xf_x + yf_y = 2$; (b) $f(x, y) = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}, \quad xf_x + yf_y = \frac{f}{2}$.

24. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f i g :

- (a) $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$; (b) $f(x, y) = ye^{xy}$; (c) $f(x, y) = x^2 + \frac{y^3}{x}$;
 (d) $f(x, y) = y \ln \frac{x}{y}$; (e) $g(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + z^2}}$; (f) $g(x, y, z) = \ln(x + y^2 + z^3 + 1)$.

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

25. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają warunek $f_{xx} + f_{yy} = 0$ (równanie Laplace'a):

- (a) $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$; (b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; (c) $f(x, y) = \cos x \cosh y$.

Ćwiczenia 5

26. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z = x^2 \sqrt{y+1}$, $(1, 3, z_0)$; (b) $z = e^{x+2y}$, $(2, -1, z_0)$; (c) $z = \frac{\arcsin x}{\arccos y}$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$;

(d) $z = (2+x-3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi Oz ; (e) $z = e^{x+y} - e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi Ox .

27. (a) Na wykresie funkcji $z = \arctg \frac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x+y-z=5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2 + y^2$, która jest prostopadła do prostej $x=t, y=t, z=2t, t \in \mathbb{R}$.

28. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

(a) $(1.02)^3 \cdot (0.997)^2$; (b) $\sqrt[3]{(3.03)^3 + (4.04)^3 + (5.05)^3}$; (c) $2.97 \cdot e^{0.05}$; (d) $\frac{\cos 0.05}{1.96}$.

29. (a) Wysokość i promień podstawy walca zmierzono z dokładnością ± 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego walca?

(b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d , jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

(c) Oszacować błąd względny δ_V objętości prostopadłościanu V , jeżeli pomiaru jego boków x, y, z dokonano z dokładnością odpowiednio $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$.

30. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\mathbf{v} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$;

(b) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

31. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 2$, $(1, -2)$; (b) $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$, $(e, 1)$; (c) $f(x, y) = (1 + xy)^y$, $(0, 0)$;

(d) $g(x, y, z) = x\sqrt{y} - e^z \ln y$, $(0, 1, 0)$; (e) $g(x, y, z) = \frac{x}{y + \sin z}$, $(0, 1, \pi)$; (f) $g(x, y, z) = \sqrt{x + \sqrt{y + \sqrt{z}}}$, $(1, 1, 1)$.

32. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (-3, 4)$, $\mathbf{v} = (12/13, 5/13)$;

(b) $f(x, y) = x - \frac{y}{x^2} + y$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (3/5, -4/5)$;

(c) $g(x, y, z) = e^{x^2y-z}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (2/3, -2/3, 1/3)$.

33. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = y - x^2 + 2 \ln(xy)$ w punkcie $(-1/2, -1)$ w kierunku wektora $\mathbf{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox . Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wektory $\mathbf{v}$, w kierunku których funkcja $f(x, y) = \sqrt{e^x}(x + y^2)$ w punkcie $(0, 2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

Ćwiczenia 6

34. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$; (b) $f(x, y) = xe^{-y} + \frac{1}{x} + e^y$; (c) $f(x, y) = xy^2(12 - x - y)$ ($x, y > 0$);

(d) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; (e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$; (f) $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ ($x, y > 0$);

(g) $f(x, y) = xy + \ln y + x^2$; (h) $f(x, y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y}$; (i) $f(x, y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$.

35. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $3x + 2y = 6$; (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 8x + 10$, $x - y^2 + 1 = 0$;
(c) $f(x, y) = x^2 y + \ln x$, $8x + 3y = 0$; (d) $f(x, y) = 2x + 3y$, $x^2 + y^2 = 1$.

Ćwiczenia 7

36. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach lub w ich dziedzinach naturalnych:

- (a) $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4\}$;
(b) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{x - y^2}$; (c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$;
(d) $f(x, y) = x^2 - y^2$, D – trójkąt o wierzchołkach $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 2)$;
(e) $f(x, y) = x^4 + y^4$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$;
(f*) $f(x, y) = (x + y)e^{-x-2y}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.

37. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 5)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, -3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

38. Jakie powinny być długość a , szerokość b i wysokość h prostopadłościenniej otwartej wanny o pojemności V , aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

39. Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \quad l : \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

40. Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216 \text{ m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie 30 zł/m^2 , do budowy podłogi w cenie 40 zł/m^2 , a sufitu w cenie 20 zł/m^2 . Znaleźć długość a , szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

41. Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne. Następnie sprzedaje je odpowiednio po 500 zł i 2000 zł za sztukę. Koszt wyprodukowania x sztuk drzwi wewnętrznych i y zewnętrznych wynosi

$$K(x, y) = x^2 - xy + y^2 \text{ [zł]}.$$

Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć największy zysk?

42. Na paraboli $y = x^2/2$ wyznaczyć punkt, którego odległość od punktu $P = (4, 1)$ jest najmniejsza.

Ćwiczenia 8

43. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

- (a) $\iint_R (x + xy - x^2 - 2y) \, dx dy$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$; (b) $\iint_R \frac{x \, dx dy}{y^2}$, $R = [1, 2] \times [2, 4]$;
(c) $\iint_R \frac{dx dy}{(x + y + 1)^3}$, $R = [0, 2] \times [0, 1]$; (d) $\iint_R (x \sin(xy)) \, dx dy$, $R = [0, 1] \times [\pi, 2\pi]$;
(e) $\iint_R e^{2x-y} \, dx dy$, $R = [0, 1] \times [-1, 0]$; (f) $\iint_R \frac{(x + y) \, dx dy}{e^x}$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

44. Obliczyć całki iterowane:

- (a) $\int_1^2 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x^2} dy$; (b) $\int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2 \sqrt{y-x} dy$; (c) $\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^3 + y^3) dy$; (d) $\int_0^3 dy \int_0^y \sqrt{y^2 + 16} dx$.

Narysować obszary całkowania.

45. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^{|x|} f(x, y) dy; & \text{(b)} \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y) dy; & \text{(c)} \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy; \\
 & \text{(d)} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y) dx; & \text{(e*)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\cos x}^{\sin x} f(x, y) dy; & \text{(f)} \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f(x, y) dy.
 \end{aligned}$$

46. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \iint_D xy^2 dx dy, \quad D : y = x, y = 2 - x^2; & \text{(b)} \iint_D x^2 y dx dy, \quad D : y = -2, y = \frac{1}{x}, y = -\sqrt{-x}; \\
 & \text{(c)} \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy, \quad D : y = \sqrt{x}, x = 0, y = 1/2, y = 1; & \text{(d)} \iint_D (xy + 4x^2) dx dy, \quad D : y = x + 3, y = x^2 + 3x + 3; \\
 & \text{(e)} \iint_D x^2 e^{xy} dx dy, \quad D : y = x, y = 1, x = 0; & \text{(f)} \iint_D \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}, \quad D : x = 1, x = 2, y = x, y = x\sqrt{3}; \\
 & \text{(g)} \iint_D e^{x^2} dx dy, \quad D : y = 0, y = 2x, x = \sqrt{\ln 3}; & \text{(h)} \iint_D (2x - 3y + 2) dx dy, \quad D : y = 0, y = \pi, x = -1, x = \sin y.
 \end{aligned}$$

47. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

$$\text{(a)} f(x, y) = \sin x \cos y, \quad D = [0, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad \text{(b)} f(x, y) = 2x - y, \quad D : 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq \sin y.$$

Ćwiczenia 9

48. Stosując odpowiednią zamianę zmiennych obliczyć podane całki podwójne po obszarach ograniczonych wskazanymi krzywymi:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \iint_D \frac{(x+y)^2}{(x-y)^3} dx dy, \quad \text{gdzie } D : x+y = -1, x+y = 1, x-y = 1, x-y = 3; \\
 & \text{(b)} \iint_D \frac{dx dy}{y}, \quad \text{gdzie } D : y = x, y = 2x, y = -\frac{1}{2}x + 1, y = -2x + 4; \\
 & \text{(c)} \iint_D xy dx dy, \quad \text{gdzie } D : xy = 1, xy = 2, y = x^2, y = 3x^3; \\
 & \text{(d*)} \iint_D (x^4 - y^4) dx dy, \quad \text{gdzie } D : x^2 + y^2 = 3, x^2 + y^2 = 5, x^2 - y^2 = 1, x^2 - y^2 = 2 \quad (x \geq 0, y \geq 0).
 \end{aligned}$$

49. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a)} \iint_D xy dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \leq 1, \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x; & \text{(b)} \iint_D xy^2 dx dy, \quad D : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2; \\
 & \text{(c)} \iint_D y^2 e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1; & \text{(d)} \iint_D x^2 dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \leq 2y; \\
 & \text{(e)} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D : y \geq 0, y \leq x^2 + y^2 \leq x; & \text{(f)} \iint_D y dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \leq 2x \quad (y \leq 0); \\
 & \text{(g)} \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy, \quad D : x^2 + y^2 \leq \pi^2; & \text{(h)} \iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) dx dy, \quad D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9.
 \end{aligned}$$

Obszar D naskicować we współrzędnych kartezjańskich.

50. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

- (a) $y^2 = 4x$, $x + y = 3$, $y = 0$ ($y \geq 0$); (b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $x^2 + y^2 - 4y = 0$;
 (c) $x + y = 4$, $x + y = 8$, $x - 3y = 0$, $x - 3y = 5$; (d) $x^2 + y^2 = 2y$, $y = \sqrt{3}|x|$.

51. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

- (a) $z = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$, $z = x^2 + y^2 - 13$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = 1$ ($z \geq 1$);
 (c) $x^2 + y^2 - 2y = 0$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$; (d) $z = 5 - x^2 - y^2$, $z = 1$, $z = 4$;
 (e*) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, $z = xy$, $z = 0$; (f*) $2z = x^2 + y^2$, $y + z = 4$.

52. Obliczyć pola płatów:

- (a) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 - Rx \leq 0$, $z \geq 0$; (c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 2$;
 (d) część sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z = (x^2 + y^2) / 2$.

Ćwiczenia 10

53. Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

- (a) $\iiint_U \frac{x \, dx \, dy \, dz}{yz}$, $U = [1, 2] \times [1, e] \times [1, e]$;
 (b) $\iiint_U (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$, $U = [1, 2] \times [2, 3] \times [3, 4]$;
 (c) $\iiint_U \sin x \sin(x + y) \sin(x + y + z) \, dx \, dy \, dz$, $U = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$;
 (d) $\iiint_U (x + y)e^{x+z} \, dx \, dy \, dz$, $U = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

54. Całkę potrójną z funkcji $g(x, y, z)$ po obszarze U zamienić na całki iterowane, jeżeli U jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

- (a) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 6$; (b) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$, ($z \geq 4$); (c) $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

55. Obliczyć całki potrójne z podanych funkcji po wskazanych obszarach:

- (a) $g(x, y, z) = e^{x+y+z}$, $U : x \leq 0$, $-x \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq -x$;
 (b) $g(x, y, z) = \frac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, $U : x \geq 0$, $y \geq 0$, $0 \leq z \leq 1 - x - y$;
 (c) $g(x, y, z) = x^2 + y^2$, $U : x^2 + y^2 \leq 4$, $1 - x \leq z \leq 2 - x$;
 (d) $g(x, y, z) = x^2 y^2$, $U : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$.

56. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki po wskazanych obszarach:

- (a) $\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dx \, dy \, dz$, $U : x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 1$;
 (b) $\iiint_U xyz \, dx \, dy \, dz$, $U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
 (c) $\iiint_U (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, $U : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$;
 (d) $\iiint_U (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$, $U : x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 2 - x - y$.

57. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki po wskazanych obszarach:

- (a) $\iiint_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, U : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9;$
- (b) $\iiint_U (x^2 + y^2) dxdydz, U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2};$
- (c) $\iiint_U z^2 dxdydz, U : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2 (R > 0);$
- (d) $\iiint_U x^2 dxdydz; U : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x.$

Ćwiczenia 11

58. Obliczyć objętości obszarów U ograniczonych podanymi powierzchniami:

- (a) $x^2 + y^2 = 9, \quad x + y + z = 1, \quad x + y + z = 5;$ (b) $z = 4 - x^2, \quad z = y^2 - 5;$
- (c) $z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 4;$ (d) $x^2 + y^2 + z^2 = 2, \quad y = 1 (y \geq 1).$

59. Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

- (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 9\};$ (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin^2 x\};$
- (c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq e^x\};$ (d) D — trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h ;
- (e) D — trójkąt równoboczny o boku $2a$, do którego dołączono półkole o promieniu a ;
- (f) D — kwadrat o boku 1, z którego wycięto półkole o średnicy 1.

60. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M , względem wskazanych osi lub punktów:

- (a) trójkąt równoboczny o boku a , podstawa; (b) odcinek paraboli o szerokości a i wysokości h , oś symetrii;
- (c) kwadrat o boku a , przekątna; (a) ćwiartka koła o promieniu R , oś symetrii;
- (e) koło o średnicy D , środek; (f) elipsa o półosiach a, b , oś symetrii.

61. Wyznaczyć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

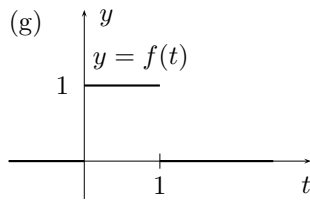
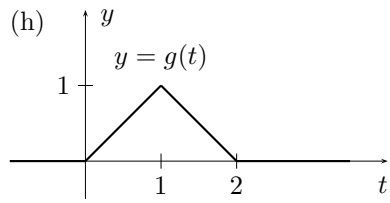
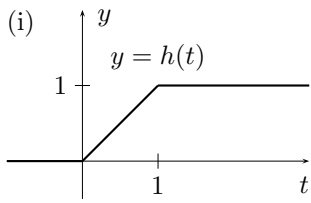
- (a) półkula o promieniu R ; (b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H ; (c) $U : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

62. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M , względem wskazanych osi:

- (a) walec o promieniu podstawy R i wysokości H , oś walca;
- (b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H , oś stożka;
- (c) kula o promieniu R , oś symetrii;
- (d) odcinek paraboloidy o średnicy D i wysokości H , oś obrotu.

Ćwiczenia 12

63. Korzystając z definicji obliczyć transformaty Laplace'a funkcji:

- (a) $2t - 1;$ (b) $\sin 2t;$ (c) $t^2;$
- (d) $te^{-t};$ (e) $e^{2t} \cos 2t;$ (f) $\sinh t;$
- (g)  (h)  (i) 

64. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a mają postać:

$$(a) \frac{1}{s+2}; \quad (b) \frac{s}{s^2+4s+5}; \quad (c) \frac{1}{s^2-4s+3}; \quad (d) \frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)};$$

$$(e) \frac{s^2+1}{s^2(s^2-1)^2}; \quad (f) \frac{s+9}{s^2+6s+13}; \quad (g) \frac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}; \quad (h) \frac{3s^2}{(s^3-1)^2}; \quad (i) \frac{e^{-s}}{s+1}.$$

65. Metodą operatorową rozwiązać zagadnienia początkowe:

$$(a) y' - y = 1, \quad y(0) = 1; \quad (b) y' - 2y = \sin t, \quad y(0) = 0;$$

Ćwiczenia 13

66. Metodą operatorową rozwiązać zagadnienia początkowe:

$$(a) y'' + y' = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1; \quad (b) y'' + 3y' = e^{-3t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1;$$

$$(c) y'' - 2y' + 2y = \sin t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1; \quad (d) y'' - 2y' + y = 1 + t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0;$$

$$(e) y'' + 4y' + 4y = t^2, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0; \quad (f) y'' + 4y' + 13y = te^{-t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

* **67.** Korzystając z własności przekształcenia Laplace'a obliczyć transformaty funkcji:

$$(a) \sin^4 t; \quad (b) \cos 4t \cos 2t; \quad (c) t^2 \cos t; \quad (d) t \sinh 3t;$$

$$(e) te^t \cos t; \quad (f) e^{3t} \sin^2 t; \quad (g) \mathbf{1}(t-2) \sin(t-2); \quad (h) \mathbf{1}(t-1)e^{t-1}.$$

* **68.** Obliczyć spłoty par funkcji:

$$(a) f(t) = e^t, \quad g(t) = e^{2t}; \quad (b) f(t) = \cos 3t, \quad g(t) = \cos t; \quad (c) f(t) = \mathbf{1}(t), \quad g(t) = \sin t; \quad (d) f(t) = e^t, \quad g(t) = t.$$

* **69.** Korzystając ze wzoru Borela wyznaczyć funkcje, których transformaty dane są wzorami:

$$(a) \frac{1}{(s+1)(s+2)}; \quad (b) \frac{1}{(s-1)^2(s+2)}; \quad (c) \frac{1}{s^2(s^2+1)}; \quad (d) \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

Ćwiczenia 14

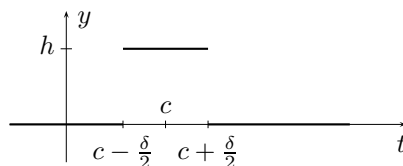
70. Korzystając z definicji wyznaczyć transformaty Fouriera funkcji:

$$(a) f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{dla } |t| > \pi; \end{cases} \quad (b) f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla } |t| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{dla } |t| > \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (c) f(t) = \begin{cases} t & \text{dla } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(d) f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{dla } |t| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |t| > 1; \end{cases} \quad (e) f(t) = e^{-|t|}; \quad (f^*) f(t) = e^{-at^2}, \quad a \neq 0.$$

Wskazówka. (f*) Wykorzystać równość $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$

71. Niech $c, h \in \mathbb{R}$ oraz $\delta > 0$. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji



Ćwiczenia 15

72. Pokazać, że jeżeli $\mathcal{F}\{f(t)\} = \hat{f}(\omega)$, to:

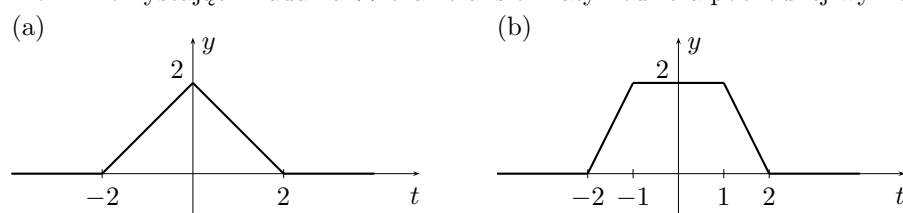
(a) $\mathcal{F}\{f(t) \cos \alpha t\} = \frac{1}{2} [\hat{f}(\omega - \alpha) + \hat{f}(\omega + \alpha)]$; (b) $\mathcal{F}\{f(t) \sin \alpha t\} = \frac{1}{2i} [\hat{f}(\omega - \alpha) - \hat{f}(\omega + \alpha)]$.

73. Korzystając z własności transformaty Fouriera oraz z wyników poprzednich zadań obliczyć transformaty funkcji:

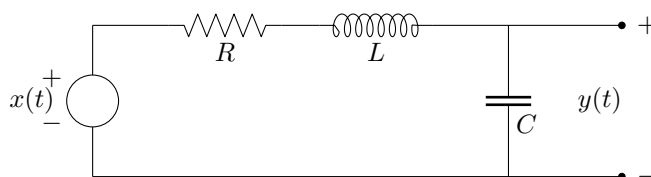
(a) $f(t) = e^{-3|t-1|}$; (b) $f(t) = te^{-|t|}$; (c) $f(t) = e^{-4t^2-4t-1}$;
 (d) $f(t) = \begin{cases} \cos \frac{t}{2} & \text{dla } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{dla } |t| > \pi; \end{cases}$ (e) $f(t) = \begin{cases} 2 \cos t & \text{dla } |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{dla } |t| > \pi; \end{cases}$ (f) $f(t) = [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-4)] \cdot t$;
 (g) $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-t} \cos t$; (h) $f(t) = e^{-|t|} \cos \frac{t}{2}$; (i) $f(t) = e^{-|t|} \sin 2t$.

Uwaga. $\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$ – funkcja Heaviside'a.

*** 74.** Korzystając z zadania 77 oraz transformaty Fouriera pochodnej wyznaczyć transformaty funkcji:



*** 75.** W obwodzie RLC , napięcie $x(t)$ jest sygnałem wejściowym, a napięcie $y(t)$ sygnałem wyjściowym (rys.).



Wyznaczyć transformatę Fouriera sygnału wyjściowego $y(t)$.

76. Obliczyć transformatę Fouriera funkcji $t^2 f''(t) + 2f'''(t)$, jeżeli $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2}$.

77. Wyznaczyć funkcje, których transformaty Fouriera mają postać:

(a) $\frac{1}{1 + 2i\omega}$; (b) $\frac{1}{4 + \omega^2}$; (c) $\frac{e^{2i\omega}}{1 + i\omega}$; (e) $\frac{\sin \omega \cos \omega}{2\omega}$; (f) $\frac{1}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)}$;

78. Obliczyć spłoty podanych par funkcji i ich transformaty Fouriera:

(a) $f(t) = g(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$, (b) $f(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$, $g(t) = \mathbf{1}(t+1) - \mathbf{1}(t)$,
 (c) $f(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-t}$, $g(t) = \mathbf{1}(t) \cdot e^{-2t}$, (d) $f(t) = g(t) = e^{-t^2}$.

Źródła zadań

- [1] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław 2019.
- [2] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Wrocław 2019.
- [3] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*, Wrocław 2018.
- [4] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania*, Wrocław 2016.
- [5] Z.Skoczylas, *Studencki konkurs matematyczny*, Wrocław 2019.